Erwartungswert, Standardabweichung und Varianz

Beispiel 1 Betül möchte mit ihren Freunden „Chuck-a-Luck“ spielen. Sie möchte gern abschätzen, wie die Chancen stehen, das Spiel zu gewinnen. Das Spiel besitzt die folgenden Regeln:

Ein Spieler setzt auf eine der Zahlen von 1 bis 6. Anschließend werden drei Würfel geworfen. Für den Fall, dass keiner der Würfel die gesetzte Zahl zeigt, geht der Einsatz verloren. Andernfalls bekommt der Spieler seinen Einsatz zurück. Zusätzlich erhält der Spieler seinen Einsatz so oft zurück, wie die von ihm gesetzte Zahl vorkam.

a) Mit welchem Gewinn oder Verlust kann Betül bei diesem Spiel rechnen?

b) Um welchen Faktor müsste der Gewinn verändert werden, damit sie einen Gewinn von 5 % erwarten könnte?

Beispiel 2 Beim Petersburger Spiel wird eine faire Münze mit Kopf (0) und Zahl (1) bis zu zehn Mal genau so oft geworfen, bis zum ersten Mal eine Zahl fällt. Falls dies schon im ersten Wurf geschieht, bekommt man von der Bank 2 € ausbezahlt. Fällt im zweiten Wurf eine Zahl, so erhält man 4 €, im dritten Wurf 8 € usw. Allgemein erhält man 2^n €, wenn die Zahl zum ersten Mal im n-ten Wurf fällt.

a) Schätzen Sie zunächst ohne Rechnung einen für den Veranstalter sinnvollen Preis, zu dem er das Spiel anbieten könnte. Führen Sie dann eine Rechnung durch.

b) Welchen Einsatz sollte der Anbieter verlangen, damit er mit einem Gewinn rechnen kann?

Lösung von Beispiel 1. a) Im Spiel gibt es insgesamt 216 mögliche Ergebnisse. Die Möglichkeiten und die zugehörigen Gewinne in Abhängigkeit von den Wurfergebnissen lassen sich gut in Form einer Tabelle notieren:

Würfelkombinationen	Anzahl der Möglichkeiten	Vielfache des Einsatzes im Gewinn	Wahrscheinlichkeit
666	1	3	$\frac{1}{216}$
$66x, 6x6, x66$ mit $x = 1, \ldots, 5$	15	2	$\frac{15}{216}$
$6xy, x6y, xy6$ mit $x, y = 1, \ldots 5$	75	1	$\frac{75}{216}$
$x, y, z = 1, \ldots, 6$	125	-1	$\frac{125}{216}$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{216}$ gewinnt Betül das Dreifache, mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{15}{216}$ das Zweifache, mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{75}{216}$ ihren Einsatz zurück. Mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{125}{216}$ verliert sie ihren Einsatz. Insgesamt ergibt sich bei der Abschätzung des Gewinns

$$3 \cdot \frac{1}{216} + 2 \cdot \frac{15}{216} + 1 \cdot \frac{75}{216} - 1 \cdot \frac{125}{216} = -0{,}078$$

Betül kann also mit einem Verlust von 7,8 % ihres Einsatzes rechnen.

b) Diese Aufgabe kann in der Tabellenkalkulation gelöst werden. In Spalte `A` kommen die Vielfachen des Gewinns, d.h. 3, 2, 1, -1. In Spalte `B` werden die Anzahlen der Möglichkeiten eingetragen; in Zelle `B5` wird die Summe der Einträge `B1` bis `B4` eingetragen. Abbildung 1 zeigt links den Stand.

In Spalte `C` sollen die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten der zu den Zeilen gehörenden Wurfergebnisse eingetragen werden. Hierzu wird jeweils der Quotient `B[i]/216` in die Zellen eingetragen.

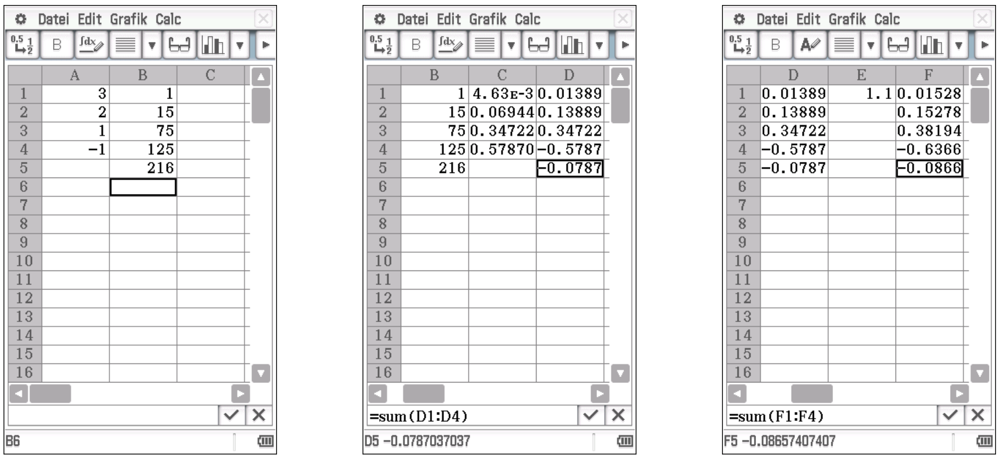

Abbildung 1: Gewinne und Verluste bei „Chuck-a-Luck“

Bildet man die Produkte der Zellen `A[i]` und `C[i]` und summiert sie über i, so ergeben sich die Ergebnisse aus Aufgabenteil a). Dies ist in Abbildung 1 in der Mitte zu sehen.

Jetzt geht es darum, einen Faktor k zu finden, so dass $k \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{216} + 2 \cdot \frac{15}{216} + 1 \cdot \frac{75}{216}\right) - 1 \cdot \frac{125}{216} > 0$ ist, denn dann wird die Gewinnwahrscheinlichkeit größer als 0. Diesen Faktor tragen wir in die Zelle `E1` ein und führen dann die Rechnung in Spalte `F` durch. Beispielsweise notiert man `=D1×E1` in Zelle `F2`. Die Eingabe der Summenberechnung in Zelle `F5` und das Ergebnis sind in Abbildung 1, rechts, sichtbar.

Lösung von Beispiel 2. a) Man würde erwarten, dass dieses Spiel schnell zu einem hohen Gewinn für den Spieler und einem großen Verlust für den Anbieter führen könnte, da der Gewinn exponentiell ansteigt.

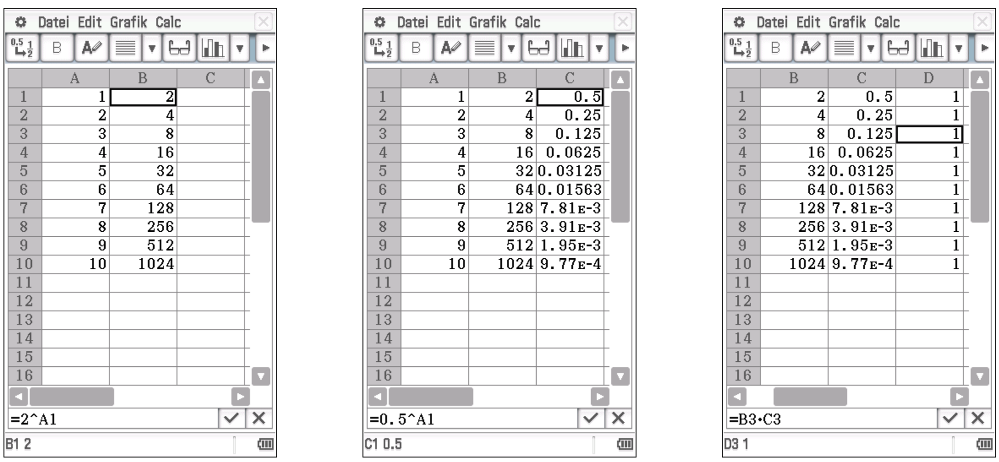

Abbildung 2: Wahrscheinlichkeiten für n-maligen Gewinn und Erwartungswert

b) Wir berechnen die Gewinne in der Tabellenkalkulation. Ab jetzt werden die Ergebnisse der entsprechenden Würfe analog zu (0001) für die erste Zahl im vierten Wurf abgekürzt. In Spalte

`A` tragen wir das $i \in 1, 2, \ldots 10$ von $X = i$ ein. In Spalte `B` notieren wir die möglichen Gewinne, also `B[i]` $= 2^{\texttt{A[i]}}$. Links in Abbildung 2 ist die Eintragung von Zelle `B1` zu sehen.

In Spalte `C` geben wir die Wahrscheinlichkeiten für die entsprechenden Gewinne ein. Die Eintragung sieht wie in der Mitte von Abbildung 4 aus. Das Ergebnis ist ebenfalls in Abbildung 4 zu sehen. Hierbei ist darauf zu achten, dass der Wert in Zelle `C10` verdoppelt werden muss, da die Ergebnisse (0000000001) und (0000000000) in Frage kommen.

Den Erwartungswert berechnen wir in Spalte `D`, indem wir jeweils die Werte aus den Spalten `B` und `C` multiplizieren. Dies zeigt die Abbildung 4. Hier ist zu erkennen, dass alle Werte bis auf den letzten gleich eins sind. Das liegt daran, dass jeweils der der Gewinn von 2^n € mit der Wahrscheinlichkeit $P(X = i) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ multipliziert wird. Beim letzten Ergebnis gibt es zwei in Frage kommende Ausgänge, daher ergibt sich hier die doppelte Wahrscheinlichkeit.

Um den Erwartungswert des Gewinns zu berechnen, addieren wir die Einträge der Zellen `D1` bis `D10` und tragen sie in Zelle `D11` ein.

Das Ergebnis ist 11. Dies bedeutet, dass ein Gewinn von 11 € erwartet werden kann.

Der Anbieter sollte daher einen Einsatz von mehr als 11 € verlangen, um nicht mit einem Verlust rechnen zu müssen.